Simulationen

1.) **Warteschlangen**

Stabiles Warteschlangensystem $G/G/c/\infty/\infty$, Mittelwert der Zwischenankunftszeiten $2 \; (\bar{x}^{(n)})$
" " Bedienzeiten $3 \; (\bar{y}^{(n)})$
" " Gesamtzahl von Kunden im System $10 \; (\bar{N})$

a) Mittlere Gesamtzeit, die ein Kunde im System verbringt?

$$\Rightarrow \bar{G} = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{\bar{N}}{\frac{1}{\bar{x}^{(n)}}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{20 \text{ Zeiteinheiten}}}$$

b) Min. Anz (c) Server zur Stabilität

$$\Rightarrow \text{Bedienrate einzelner Server} = p = \frac{\lambda}{c \cdot \mu}$$

Stabil, wenn $\lambda \leq c \cdot \mu \Rightarrow c \geq \frac{\lambda}{\mu}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ankunftsrate} = \lambda = \frac{1}{\bar{x}^{(n)}} = \frac{1}{2} \\ \text{Bedienrate} = \mu = \frac{1}{\bar{y}^{(n)}} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow c \geq \frac{3}{2} \Rightarrow c = \underline{\underline{2}}$$

c) durchschnittliche Serverauslastung

$$\Rightarrow p = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} = \frac{\frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} = \underline{\underline{0,75}}$$

d) mittlere Länge Warteschlange

$$\Rightarrow \bar{L} = \bar{N} - p = 10 - 0,75 = \underline{\underline{9,25}}$$

e) durchschnittliche Wartezeit

$$\Rightarrow \frac{\bar{N} - p}{\lambda} = \frac{10 - 0,75}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 9,25 = \underline{\underline{18,5}}$$

2. **Markovsche Warteschlangen**

Zwischenankunftszeit X_n, Mittelwert $1,5 \; (\bar{x}^{(n)})$, Standartabweichung $0,8^{1}$, Bedienzeit Y_n Mittelwert $0,5 \; (\bar{y}^{(n)})$, Standartabweichung $0,4^{2}$

$^1 = S_x \quad ^2 = S_y$

a) Welches Modell passt?

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \frac{S_x}{\bar{x}^{(n)}} = \frac{0,8}{1,5} \approx 0,5 \rightarrow \text{nicht } 1 \; (G) \\ \frac{S_y}{\bar{y}^{(n)}} = \frac{0,4}{0,5} \approx 0,8 \rightarrow \text{nahe } 1 \; (M) \end{array}\right\} \underline{\underline{G/M/1}}$$

b) mittlere Länge Warteschlange (M/M/1)

$$\Rightarrow \Lambda = \frac{p}{1-p} \quad \text{mittlere Wartezeit} = w = \frac{1}{\mu(1-p)} \quad \bar{x}^{(n)} = 1,5 \quad \bar{y}^{(n)} = 0,5$$

$$\lambda = \frac{1}{\bar{x}^{(n)}} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3} \quad \mu = \frac{1}{\bar{y}^{(n)}} = \frac{1}{0,5} = 2 \quad p = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

M/G/1

Standartabweichung $\sigma^2 \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\mu}$

$$\Lambda = \frac{p}{1-p} + \frac{1}{2} \frac{p^2}{1-p} \left(\mu^2 \cdot \text{var} - 1\right)$$

$$w = \frac{1}{\mu(1-p)} + \frac{1}{2} \frac{p}{\mu(1-p)} \cdot \left(\mu^2 \cdot \text{var} - 1\right)$$

M/M/1

$$\Lambda = \frac{p}{1-p} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$w = \frac{1}{2 \cdot (1-\frac{1}{3})} = \frac{1}{2 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

M/D/1

$$\Lambda = \frac{p}{1-p} \cdot \left(1 - \frac{p}{2}\right) = \Lambda(M/M/1) \cdot 1 - \frac{p}{2}$$

$$w = \frac{1}{\mu(1-p)} \cdot 1 - \frac{p}{2} = w_{(M/M/1)} \cdot 1 - \frac{p}{2}$$

3) **Simulation von Zufall + Monte Carlo**

a) Kongruenz - Pseudo - Zufallszahlen - Generator

Primzahl (Kongruenz) $p = 7$, Faktor $a = 1$, Verschiebung $c = 5$

$$\Rightarrow x_n = (a \cdot x_{(n-1)} + c) \bmod p$$

$$\underline{\underline{x_n = (1 \cdot x_{(n-1)} + 5) \bmod 7}}$$

b) Startwert (Seed) $x_0 = 2$

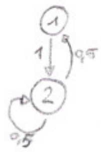
$\Rightarrow x_0 = 2$
$x_1 = (1 \cdot 2 + 5) \bmod 7 = 0$
$x_2 = (1 \cdot 0 + 5) \bmod 7 = 5$
$x_3 = (1 \cdot 5 + 5) \bmod 7 = 3$
$x_4 = (1 \cdot 3 + 5) \bmod 7 = 1$
$x_5 = (1 \cdot 1 + 5) \bmod 7 = 6$
$x_6 = (1 \cdot 6 + 5) \bmod 7 = 4$
Zyklusende, da $x_7 = 2$

c) Monte-Carlo-Methode

$\Rightarrow$ Streiche 0

$$\left.\begin{array}{l} \text{Setze } 1,2,3 \mathrel{\hat{=}} \text{Kopf} \\ \text{Setze } 4,5,6 \mathrel{\hat{=}} \text{Zahl} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Kopf, Zahl, Kopf, Kopf, Zahl, Zahl}$$

4) **Markovkette**: 2 Zustände,



a) Matrix π

$$\Rightarrow \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array}$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0,5 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix}}} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array}$$

b) Matrix π^2 $\rightarrow$ Zeile $\times$ Spalte

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0,5 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0,5 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0,5 & 0+0,25 \\ 0+0,5 & 0,5+0,25 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 0,75 \end{pmatrix}}}$$

c) Startzustand: 1, 2 Schritte Wahrscheinlichkeit f. Zustand 1

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5+0 \\ 0,5+0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}}$$

← Wahrscheinlichkeit von 0,5 (50%), dass nach 2 Schritten im Zustand 1

Start Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, 2 Schritte, Wahrsch. für Zustand 2

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 0,5+0,25 \\ 0,5+0,75 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0,75 \\ 1,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,375 \\ 0,675 \end{pmatrix}$$

↳ 67,5%

Zusatz

	1	2	3	4	5 …
	0	5	6	7	10 ← Ankunftszeit*
	0	5	1	1	3 ← Zwischenankunftszeit
0+3−5 ←	3	2	3	4	4 ← Bediendauer*
	0	0	1	3	4 ← Wartezeit

*gegeben

Warteschlangen:

KundenNr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ankunftszeit	0	3	4	5	7	8	9	15	18	20
Bediendauer	1	2	2	1	2	2	2	3	3	2

a) Mittelwert Differenz $\Rightarrow$ letzter Wert/Anz $\Rightarrow 20/10 = \underline{\underline{2}}$
" Ankunftsrate $\Rightarrow$ Anz/Sum Ankzeit $\Rightarrow \underline{\underline{10/89}}$
" Ankunftszeit $\Rightarrow$ Kehrwert Ankrate $\Rightarrow 89/10 = \underline{\underline{8\frac{9}{10}}}$
" Bediendauer $\Rightarrow$ Sum Bediendauer/Anz $\Rightarrow 20/10 = \underline{\underline{2}}$

b) empirische Standartabweichung

$$\hookrightarrow s(n) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - \bar{x}(n)\right)^2}$$

Anz Werte; momentane Bediendauer; mittlere Bediendauer

$$\Rightarrow s(n) = \sqrt{\frac{1}{10-1} \left((1-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2 + (3-2)^2 + (2-2)^2\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{10-1} (1+1+1+1)} = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot \frac{4}{1}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Konfidenzbereich: $E(x) \in \left[\bar{x}(n) - \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot s(n) \, , \, \bar{x}(n) + \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot s(n)\right]$

$= E(x) \in \left[2 - \frac{2}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2}{3} \, , \, 2 + \frac{2}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2}{3}\right]$

$= E(x) \in \left[2 - \frac{4}{\sqrt{10} \cdot 3} \, , \, 2 + \frac{4}{\sqrt{10} \cdot 3}\right]$

↳ = 10 (siehe Blatt!)

$= E(x) \in \left[2 - \frac{4}{10} \, , \, 2 + \frac{4}{10}\right]$

$= E(x) \in \underline{\underline{\left[1\frac{6}{10} \, , \, 2\frac{4}{10}\right]}}$